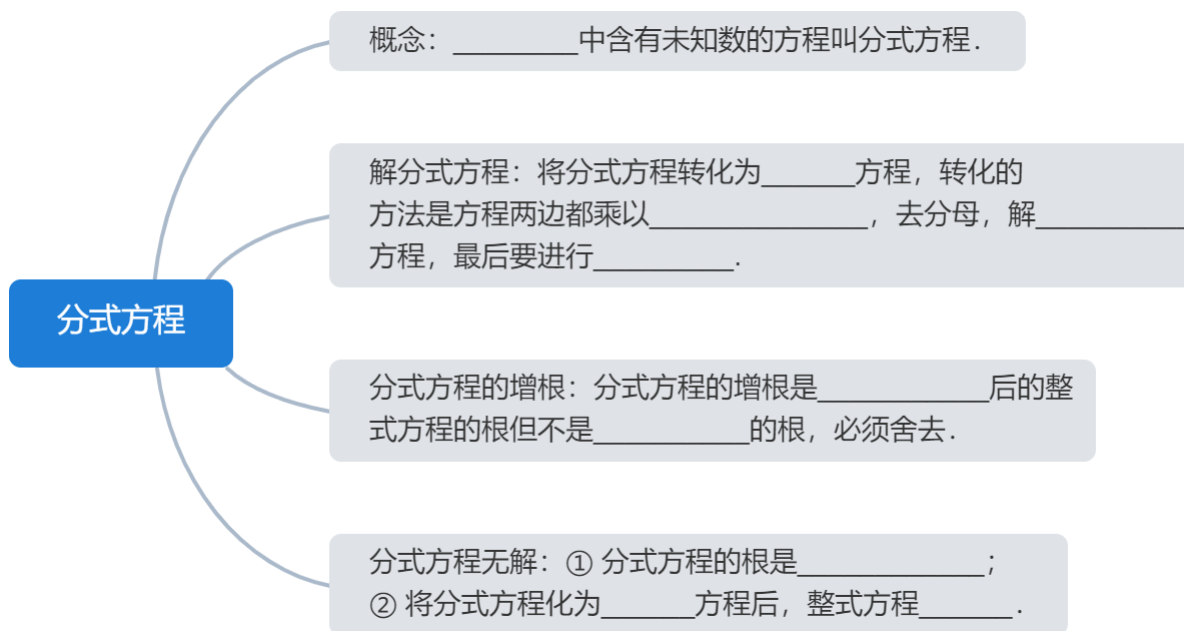


分式方程及应用

一、分式方程



【教法备注】

1、分式方程的概念：分母中含有未知数的方程叫分式方程。

① 分式方程的重要特征是：(a) 是方程；(b) 方程含分母；(c) 分母里含有未知数。

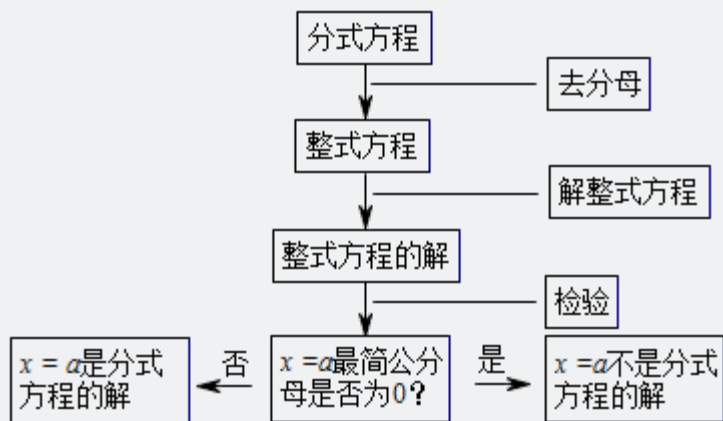
分母中含有未知数的方程是分式方程，如 $\frac{1}{x} + 1 = 3$ ， $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{3}{x-1}$ ；

分母中不含有未知数的方程是整式方程，如 $\frac{2x}{3} = \frac{x-1}{2}$ ， $\frac{x+1}{b} - \frac{x-1}{a} = 1$ (x 是未知数)。

2、解分式方程：将分式方程转化为整式方程，转化的方法是方程两边都乘以最简公分母，去分母。

(分式方程和整式方程的联系：分式方程通过“去分母”转化为整式方程，然后求解。)

解分式方程的一般步骤：



① 在方程的两边同时乘以最简公分母，约去分母，得到整式方程；

② 解这个整式方程；

③ 检验，将整式方程的解代入最简公分母，如果最简公分母的值不为0，则整式方程的解是原分式方程的解；否则，这个解不是原分式方程的解，必须舍去。

3、分式方程的增根：分式方程的增根是去分母后的整式方程的根但不是原方程的根，必须舍去。

增根产生的原因：

分式方程本身隐含分母不为0的条件，而去分母时方程两边同乘的最简公分母有可能为零，对于整式方程来说，求出的根成立，而对于原分式方程来说，分式无意义，所以这个根是原分式方程的增根。

分式方程的增根满足两个条件：

① 是整式方程的解；② 代入最简公分母为0。

增根存在的可能性是使最简公分母为0的值。

4、分式方程无解：

① 分式方程的根是增根；

② 将分式方程化为整式方程后，整式方程无解。

例题

【知识点拨】

分式方程和整式方程的区别就在于分母中是否有未知数。解分式方程首先要进行去分母，然后按照整式方程解即可，但是一定要强调好最后要进行检验。分式方程的增根这部分，首先也要进行解方程，然后再根据增根的定义求参数。无解这部分要注意是两种情况，这部分学生易忘整式方程无解，所以可以带学生复习整式方程无解的问题（ $ax = b$ 无解则： $a = 0$ ， $b \neq 0$ ）。

1. 方程 $\frac{1}{x-1} = \frac{5}{2x+1}$ 的解为 _____。

【答案】 $x = 2$

【解析】 方程两边都乘以 $(x-1)(2x+1)$ 得，

$$2x + 1 = 5(x - 1),$$

解得 $x = 2$,

检验：当 $x = 2$ 时， $(x - 1)(2x + 1) = (2 - 1) \times (2 \times 2 + 1) = 5 \neq 0$,

所以，原方程的解是 $x = 2$ 。

【标注】【知识点】解可化为一元一次方程的分式方程

【重点强调】

2016年天津红桥区初三三模第15题3分

2. 解分式方程：
$$\frac{x}{x-1} - 1 = \frac{3}{(x-1)(x+2)}.$$

【答案】原方程无解。

【解析】
$$\frac{x}{x-1} - 1 = \frac{3}{(x-1)(x+2)},$$

去分母，得： $x(x+2) - (x-1)(x+2) = 3$,

去括号，得： $x^2 + 2x - x^2 - x + 2 = 3$,

解得： $x = 1$ 。

检验：当 $x = 1$ 时， $(x-1)(x+2) = 0$,

$\therefore$ 原方程无解。

【标注】【知识点】解可化为一元一次方程的分式方程

【重点强调】

2016~2017学年天津津南区初二下学期期末第21题6分

3. 若关于 x 的分式方程 $\frac{3}{x-4} + \frac{x+m}{4-x} = 1$ 有增根，则 m 的值是 ()。

A. $m = 0$ 或 $m = 3$

B. $m = 3$

C. $m = 0$

D. $m = -1$

【答案】 D

【解析】去分母得： $3 - x - m = x - 4$ ，

由分式方程有增根，得到 $x - 4 = 0$ ，即 $x = 4$ ，

把 $x = 4$ 代入整式方程得： $3 - 4 - m = 0$ ，

解得： $m = -1$ 。

【标注】【知识点】分式方程的增根问题

4. 若关于 x 的分式方程 $\frac{x-a}{x-1} - \frac{3}{x} = 1$ 无解，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】1或-2

【解析】去分母得 $x^2 - ax - 3x + 3 = x^2 - x$ ， $(a+2)x = 3$ 。

当去分母后的整式方程无解时， $a+2=0$ ， $a=-2$ ；

当解为增根时， $x=1$ ， $a=1$ 。

故答案为：1或-2。

【标注】【知识点】分式方程的无解问题

5. 已知关于 x 的方程 $\frac{1}{x-2} + \frac{a}{x^2-4} = \frac{3}{x+2}$ 无解，求 a 的值。

【答案】-4或-12。

【解析】解分式方程得：

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-2} + \frac{a}{(x-2)(x+2)} &= \frac{3}{x+2} \\ x+2+a &= 3(x-2) \\ x+2+a &= 3x-6, \\ 2x &= a+8 \\ x &= \frac{a+8}{2}\end{aligned}$$

∵分式方程无解，

∴ $x = \frac{a+8}{2}$ 为增根，

$$\therefore \frac{a+8}{2} = 2 \text{ 或 } \frac{a+8}{2} = -2 ,$$

$$a+8=4, a+8=-4 ,$$

$$a=-4, a=-12 .$$

综上： $a=-4$ 或 -12 .

【标注】【知识点】由分式方程的解确定参数

【重点强调】

2019~2020学年11月天津南开区天津市南开翔宇学校初二上学期月考第22题

练习

6. 方程 $\frac{2}{x} = \frac{3}{x-1}$ 的解为 () .

A. $x = -2$

B. $x = 2$

C. $x = -1$

D. $x = \frac{1}{2}$

【答案】 A

【解析】 方程两边同乘以 $x(x-1)$ 得 ,

$$2x - 2 = 3x ,$$

$$\text{解得 : } x = -2 .$$

经检验： $x = -2$ 是原方程的解 .

【标注】【知识点】解可化为一元一次方程的分式方程

【重点强调】

2016年天津河东区初三一模第6题3分

7. 解分式方程： $\frac{x-1}{x-3} + \frac{2}{3x-x^2} = 1$.

【答案】 $x = 1$.

【解析】去分母得： $x^2 - x - 2 = x^2 - 3x$ ，

解得： $x = 1$ ，

经检验 $x = 1$ 是分式方程的解．

【标注】【知识点】解可化为一元二次方程的分式方程

【重点强调】

2017~2018学年天津河北区初二上学期期末第19题8分

8. 如果方程 $\frac{x}{x-3} = \frac{3m}{x-3}$ 有增根，那么 m 的值为_____．

【答案】1

【解析】方程两边都乘以 $(x-3)$ 得， $x = 3m$ ，

∵方程有增根，

∴ $x - 3 = 0$ ，

解得 $x = 3$ ，

∴ $3m = 3$ ，

解得 $m = 1$ ．

【标注】【知识点】分式方程的增根问题

9. 若关于 x 的方程 $\frac{3-2x}{x-3} + \frac{2+mx}{3-x} = -1$ 无解，则 m 的值为（ ）．

A. 3

B. -3

C. $-\frac{5}{3}$ 或-1

D. 0

【答案】C

【解析】去分母得： $3 - 2x - 2 - mx = -x + 3$ 整理为： $(1 + m)x = -2$

该整式方程无解时，原分式方程无解，此时 $m = -1$

该整式方程有解，此解恰好是原分式方程的增根，此时 $m = -\frac{5}{3}$ ．

【标注】【知识点】分式方程的无解问题

【重点强调】

2016~2017学年天津滨海新区初二上学期期末第11题3分

10. 若关于 x 的方程 $\frac{mx}{x-2} - 1 = \frac{-4}{2-x}$ 无解，则 m 的值为_____．

【答案】 2或1

【解析】 $\frac{mx}{x-2} - 1 = \frac{-4}{2-x}$,

$$mx - x + 2 = 4,$$

$$mx - x = 2,$$

$$(m-1)x = 2,$$

当 $m-1=0$, 即 $m=1$ 时,

无解.

当 $m-1 \neq 0$, 即 $m \neq 1$ 时,

$$x = \frac{2}{m-1}.$$

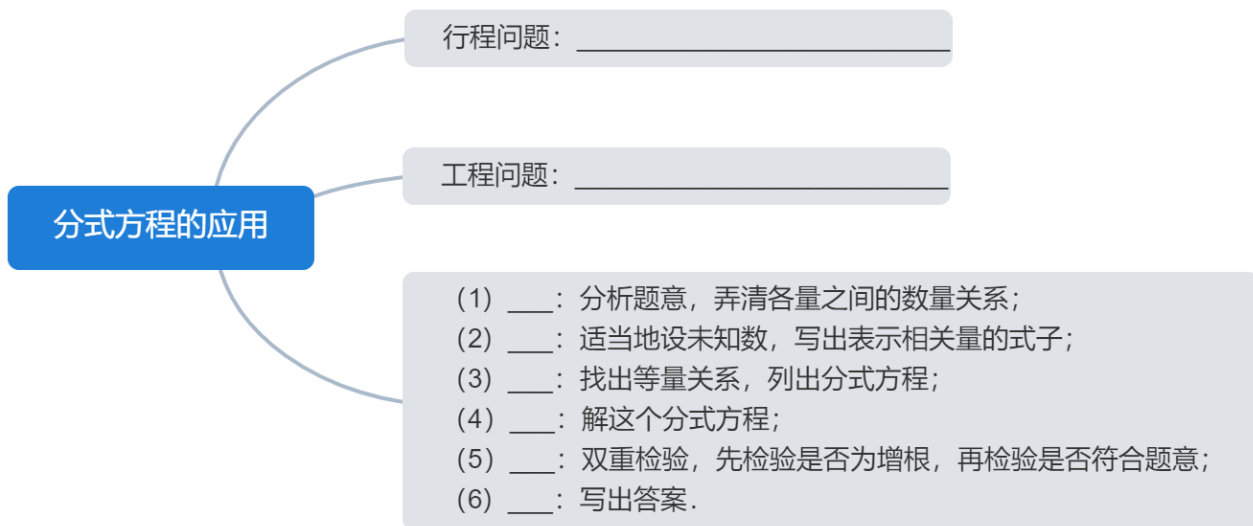
$$\therefore \frac{2}{m-1} = 2, m = 2.$$

【标注】 【知识点】 分式方程的无解问题

【重点强调】

2018~2019学年12月天津南开区天津市南开翔宇学校初二上学期月考第16题3分

二、分式方程的应用



【教法备注】

分式方程的应用主要就是列方程解应用题, 它与学习一元一次方程时列方程解应用题的基本思路和方法是一样的.

1、列分式方程解应用题常见题型：

(1) 行程问题：路程=速度×时间，一般以时间构建等量关系．

(2) 工程问题：工作总量=工作效率×工作时间，一般以工作时间构建等量关系．

2、列分式方程解应用题的步骤：

(1) 审：分析题意，弄清各量之间的数量关系；

(2) 设：适当地设未知数，写出表示相关量的式子；

(3) 列：找出等量关系，列出分式方程；

(4) 解：解这个分式方程；

(5) 验：双重检验，先检验是否为增根，再检验是否符合题意；

(6) 答：写出答案．

【注意】

检验分两个方面，首先检验这个解是否为分式方程本身的解；其次检验这个解是否是实际问题的解，即是不是符合实际意义．

|| 例题

【知识点拨】

分式方程应用这部分，和整式方程的解题思路比较类似，只不过多了一步要进行检验。常见的两种类型，学生列不出分式时可以利用列表的方法，把已知条件和未知数写在表格内，另一个量就可以利用分式表示了。

s	v	t

工作总量	工作效率	工作时间

11. 张老师和李老师同时从学校出发，步行15千米去县城购买书籍，张老师比李老师每小时多走1千米，结果比李老师早到半小时，两位老师每小时各走多少千米？设李老师每小时走 x 千米，依题意得到的方程是（ ）．

A. $\frac{15}{x+1} - \frac{15}{x} = \frac{1}{2}$ B. $\frac{15}{x} - \frac{15}{x+1} = \frac{1}{2}$ C. $\frac{15}{x-1} - \frac{15}{x} = \frac{1}{2}$ D. $\frac{15}{x} - \frac{15}{x-1} = \frac{1}{2}$

【答案】 B

【解析】 ∵ 张老师比李老师每小时多走1km，

∴设李老师每小时走 x 千米，则张老师每小时走 $(x+1)$ km，

故方程为 $\frac{15}{x} - \frac{15}{x+1} = \frac{1}{2}$ ．

故选B．

【标注】【知识点】分式方程的行程问题

【重点强调】

2016年天津河东区初三毕业考试第9题3分

12. 轮船顺流航行80千米返回，共用6小时20分钟，已知水流速度是3千米/小时，如果设静水中轮船的速度为 x 千米/小时，则所列方程正确的是（ ）

A. $80(x+3) + 80(x-3) = 6\frac{1}{3}$

B. $\frac{80}{x+3} - \frac{80}{x-3} = 6\frac{1}{3}$

C. $\frac{80}{x+3} + \frac{80}{x-3} = 6\frac{1}{3}$

D. $\frac{80}{x} + \frac{80}{80} = 6\frac{1}{3}$

【答案】C

【标注】【知识点】分式方程的行程问题

13. 炎炎夏日，甲安装队为A小区安装66台空调，乙安装队为B小区安装60台空调，两队同时开工且恰好同时完工，甲队比乙队每天多安装2台，设乙队每天安装 x 台空调，根据题意，下面所列方程正确的是（ ）．

A. $\frac{66}{x} = \frac{60}{x-2}$

B. $\frac{66}{x-2} = \frac{60}{x}$

C. $\frac{66}{x} = \frac{60}{x+2}$

D. $\frac{66}{x+2} = \frac{60}{x}$

【答案】D

【解析】乙队用的天数为 $\frac{60}{x}$ ，

甲队用的天数为 $\frac{66}{x+2}$ ，

则所列方程为 $\frac{66}{x+2} = \frac{60}{x}$ ．

【标注】【知识点】分式方程的和差倍分

【重点强调】

2016年天津河东区初三毕业考试第9题3分

14.

某工厂接到制作450件产品的订单，为了尽快完成任务，该厂实际每天制作的件数比原来每天多20%，结果提前5天完成任务，原来每天制作多少件？

【答案】 15件．

【解析】 设原来每天制作 x 件，则后来每天制作 $(1 + 20\%)x$ 件，

$$\text{由题意得，} \frac{450}{x} - \frac{450}{(1 + 20\%)x} = 5,$$

解得： $x = 15$ ，

经检验： $x = 15$ 是原分式方程的解，且符合题意．

答：原来每天制作15件．

【标注】【知识点】分式方程的工程问题

【重点强调】

2015年天津河北区初三二模第23题10分

15. 某文具店老板第一次用1000元购进一批文具，很快销售完毕．第二次购进时发现每件文具进价比第一次上涨了2.5元．老板用2500元购进了第二批文具，所购进文具的数量是第一次购进数量的2倍，同样很快销售完毕，两批文具的售价为每件15元．

(1) 问第二次购进了多少件文具．

(2) 文具店老板第一次购进的文具有30元的损耗，第二次购进的文具有125元的损耗，问文具店老板在这两笔生意中是盈利还是亏本，请说明理由．

【答案】 (1) 第二次购进200件文具．

(2) 利润为 $470 + 375 = 845$ 元.

【解析】(1) 设第一次购进 x 件文具, 第二次就购进 $2x$ 件文具,

$$\text{由题意得, } \frac{1000}{x} = \frac{2500}{2x} - 2.5,$$

$$\text{解得: } x = 100,$$

经检验, $x = 100$ 是原方程的解, 且符合题意,

$$\text{则 } 2x = 2 \times 100 = 200.$$

答: 第二次购进 200 件文具.

(2) 第一次购进 100 件文具, 利润为: $(15 - 10) \times 100 - 30 = 470$ (元).

第二次购进 200 件文具, 利润为: $(15 - 12.5) \times 200 - 125 = 375$ (元),

两笔生意是盈利: 利润为 $470 + 375 = 845$ 元.

【标注】【知识点】分式方程的经济问题

【重点强调】

2017~2018 学年天津河北区初二上学期期末第 21 题 10 分

练习

16. 八年级学生去距学校 10 千米的博物馆参观, 一部分学生骑自行车先走, 过了 20 分钟后, 其余学生乘汽车出发, 结果他们同时到达, 已知汽车的速度是骑车学生速度的 2 倍. 设骑车学生的速度为 x 千米/小时, 则所列方程正确的是 ().

A. $\frac{10}{x} - \frac{10}{2x} = 20$ B. $\frac{10}{2x} - \frac{10}{x} = 20$ C. $\frac{10}{x} - \frac{10}{2x} = \frac{1}{3}$ D. $\frac{10}{2x} - \frac{10}{x} = \frac{1}{3}$

【答案】C

【解析】由题意可得,

$$\frac{10}{x} - \frac{10}{2x} = \frac{1}{3}.$$

故选 C.

【标注】【知识点】分式方程的行程问题

【重点强调】

2016~2017 学年天津武清区初二上学期期末第 11 题 3 分

17. 一艘轮船在静水中的最大航速为 30km/h , 它以最大航速沿江顺流航行 90km 所用时间, 与以最大航速逆流航行 60km 所用时间相等. 设江水的流速为 $v\text{km/h}$, 根据题意, 下面所列方程正确的是 (

) .

A. $\frac{90}{30+v} = \frac{60}{30-v}$ B. $\frac{90}{v} = \frac{60}{30-v}$ C. $\frac{90}{30-v} = \frac{60}{30+v}$ D. $\frac{90}{30-v} = \frac{60}{v}$

【答案】 A

【解析】 根据题意列方程： $\frac{90}{30+v} = \frac{60}{30-v}$.

【标注】 【知识点】 分式方程的行程问题

【重点强调】

2016年天津红桥区初三一模第10题3分

18. 某工程队要铺建一条长2000米的管道，采用新的施工方式，工作效率提高了25%，结果比原计划提前2天完成了任务，设这个工程队原计划每天要铺建 x 米管道，则依题意所列方程正确的是（ ） .

A. $\frac{2000}{x} + 2 = \frac{2000}{1.25x}$ B. $\frac{2000}{x} = \frac{2000}{1.25x} - 2$ C. $\frac{2000}{x} + \frac{2000}{1.25x} = 2$ D. $\frac{2000}{x} - \frac{2000}{1.25x} = 2$

【答案】 D

【解析】 设这个工程队原计划每天要铺建 x 米管道，则依题意可得：

$$\frac{2000}{x} - \frac{2000}{1.25x} = 2$$

故选：D .

【标注】 【知识点】 分式方程的工程问题

【重点强调】

2017~2018学年天津初二上学期期末（部分区）第12题3分

19. 某车间加工1200个零件后采用了新工艺，工效提高了50%，这样加工同样多的零件少用10h，求采用新工艺前、后每小时分别加工多少个零件？若设采用新工艺前每小时加工 x 个零件，则可列方程为（ ） .

A. $\frac{1200}{(1+50\%)x} - \frac{1200}{x} = 10$ B. $\frac{1200}{x} - \frac{1200}{(1+50\%)x} = 10$
C. $\frac{1200}{x} - \frac{1200}{(1-50\%)x} = 10$ D. $\frac{1200}{(1-50\%)x} - \frac{1200}{x} = 10$

【答案】 B

【解析】

新工艺前后生产零件都为1200个，设新工艺前每小时生产 x 个，则新工艺后为 $(1 + 50\%)x$ 个，

根据“这样加工同样多零件少用10h”和时间=工作总量/工作效率，得：

$$\frac{1200}{x} - \frac{1200}{(1 + 50\%)x} = 10.$$

故选B.

【标注】【知识点】分式方程的工程问题

【重点强调】

2019~2020学年天津南开区天津市育贤中学初二上学期期中第11题

20. 某校利用暑假进行田径场的改造维修，项目承包单位派遣甲施工队进场施工，计划用40天完成整个工程．当甲施工队工作5天后，承包单位接到通知，有一大型活动要在该田径场举行，要求比原计划提前14天完成整个工程，于是承包单位派遣乙施工队与甲施工队共同完成剩余工程，结果按通知要求如期完成了整个工程．

(1) 若乙施工队单独施工，完成整个工程需要多少天．

(2) 若此项工程从开始就甲、乙施工队同时进场施工，完成整个工程需要多少天．

【答案】(1) 由乙施工队单独施工，完成整个工程需要60天．

(2) 需要24天．

【解析】(1) 设乙施工队单独施工需要 x 天，

依题意可得： $\frac{1}{40} \times 5 + \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{x} \right) \times (40 - 5 - 14) = 1$ ，

解得： $x = 60$ ，

经检验 $x = 60$ 是原分式方程的解．

答：由乙施工队单独施工，完成整个工程需要60天．

(2) 由题意可得： $1 \div \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{40} \right) = 24$ (天)，

答：若此项工程从开始就甲、乙施工队同时进场施工，完成整个工程需要24天．

【标注】【知识点】分式方程的工程问题

【重点强调】

2018~2019学年天津河西区初二上学期期末第21题8分

 我学会了什么